Banque d'épreuves Archimède

CONCOURS 1998

Option : MP

MATHEMATIQUES
Durée : 4 heures

Les calculatrices programmables et alphanumériques sont autorisées sous réserve des conditions définies dans la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.

PROBLÈME D'ALGÈBRE

PARTIE I

Notations

On note par E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et, pour tout entier n, $n \in \mathbb{N}$, on note par E_n le sous-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.

1. Soit Φ l'application de E dans E qui, à tout polynôme P de E, fait correspondre le polynôme $\Phi(P) = (2X-1)P - (X^2+\frac{1}{2})P'$, où P' désigne le polynôme dérivé de P.

a. Monter que Φ est linéaire.

b. Pour tout P de E, déterminer, en fonction de P, le degré de $\Phi(P)$.

c. Montrer que Φ est injective.

L'endomorphisme Φ est-il surjectif ?

d. Résoudre l'équation $\Phi(P) = 1$ où $P \in E$ est l'inconnue.

2. a. On cosidère l'équation différentielle : $(2x-1)y - (x^2+\frac{1}{2})y' = 1$.

i) Cette équation différentielle admet-elle une solution particulière polynômiale?

ii) Donner toutes les fonctions continument dérivables solutions de cette équation.

b. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : $2xy - (x^2+\frac{1}{2})y' = 0$.

3. On définit, pour $k \in \mathbb{N}$, l'application linéaire Φ_k de E_k dans E_{k+1} qui, à tout polynôme P de E_k, fait correspondre le polynôme $\Phi_k(P) = (2X-1)P - (X^2+\frac{1}{2})P'$ de E_{k+1}.

a. Déterminer le rang de Φ_k.

b. Donner une base de $\Phi_k(E_k)$, image par Φ_k de E_k (notée $Im(\Phi_k)$)

c. Montrer que $Im(\Phi_2) = E_2$.

4. On définit l'endomorphisme φ de E_2 qui, à tout polynôme P de E_2, fait correspondre le polynôme $\varphi(P) = (2X - 1)P - (X^2 + \frac{1}{2})P'$.

a. Montrer que φ est un automorphisme.
b. Montrer que -1 est une valeur propre de φ et préciser les éléments propres associés.
c. Est-ce que φ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$? sur $\mathbb{C}$?
d. On pose Q le polynôme image par φ du monôme X.
i) Exprimer le polynôme $\varphi(Q)$ en fonction du monôme X et du polynôme Q.
ii) En déduire l'existence d'un plan stable que l'on précisera.
e. Trouver tous les sous espaces vectoriels de E_2 stables par φ.

5. a. Trouver tous les sous espaces vectoriels de dimension finie de E stables par Φ.
b. Donner un exemple de sous espace vectoriel de dimension infinie de E, autre que E, stable par Φ.

PARTIE II.

On considère un sous-corps $\mathbb{K}$ du corps des nombres complexes $\mathbb{C}$. On note par $\mathbb{K}[X]$ l'espace des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

On dit qu'un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ degré n est simple sur $\mathbb{K}$ s'il possède exactement n racines, deux à deux distinctes, dans $\mathbb{K}$.

1. Soit P un polynôme non nul de $\mathbb{C}[X]$.
Montrer que si P est à coefficients réels et est simple sur $\mathbb{R}$, il en est de même de son polynôme dérivé.
Cette propriété est-elle encore vraie si P est simple sur $\mathbb{C}$?

2. Montrer que pour tout entier n non nul, le polynôme $P_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} X^k$ est simple sur $\mathbb{C}$.

3. Soit P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$.
a. Montrer que si P est simple sur $\mathbb{K}$, P et P' sont premiers entre eux.
b. Montrer la réciproque quand $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

4. Montrer que le polynôme solution de la question **1**.d. de la PARTIE I est simple sur $\mathbb{C}$.

5. Dans cette question F désigne un espace vectoriel de dimension finie n sur $\mathbb{C}$ et f un endomorphisme de F. On note par P_f le polynôme minimal de f.
Montrer que les propositions (i), (ii) et (iii) suivantes sont équivalentes :
(i) P_f est simple sur $\mathbb{C}$. ;
(ii) P_f et son polynôme dérivé sont premiers entre eux ;
(iii) f est diagonalisable.

6. On reprend pour les notations E et Φ les définitions données dans la PARTIE I.

On note d'autre part par : Id_E l'endomorphisme identité de E, $0_{\mathcal{L}(E)}$ l'endomorphisme nul de E, par f^k, k un entier non nul, la composée k fois de l'endomorphisme f par lui-même et on pose $f^0 = Id_E$.

Pour P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$, $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, et f un endomorphisme de E on note par $P(f)$ l'endomorphisme défini par : $P(f) = \sum_{k=0}^{n} a_k f^k$ et par $\mathbb{K}[f]$ l'algèbre des endomorphismes $P(f)$, $P \in \mathbb{K}[X]$.

Soit f un endomorphisme de E vérifiant : $2f^2 + Id_E = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

a. Déterminer la dimension de $\mathbb{K}[f]$ et donner une base de $\mathbb{K}[f]$.

b. On considère l'application θ définie de $\mathbb{K}[f]$ dans $\mathbb{K}[f]$ par $\theta(P(f)) = \Phi(P)(f)$ pour tout $P(f)$ de $\mathbb{K}[f]$.

i) Montrer que θ est linéaire et donner sa matrice dans la base de $\mathbb{K}[f]$ que vous avez précisé en **6** .a. ci-dessus.

ii) Montrer, pour P et Q dans $\mathbb{K}[X]$, que si $P(f) = Q(f)$ alors $\theta(P(f)) = \theta(Q(f))$

PROBLÈME D'ANALYSE

Soit φ une fonction de variable réelle à valeurs réelles.

On appelle support de φ l'adhérence dans $\mathbb{R}$ de l'ensemble des réels x pour lesquels $\varphi(x)$ est non nul.

I. On se propose de montrer qu'il n'existe pas de fonction continue δ à support compact telle que, pour toute fonction continue f, à support compact, $f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(t-x)\,dx$ (α)

Faisons l'hypothèse (H_c) qu'il existe une telle fonction δ vérifiant (α).

Pour n, entier non nul, soit φ_n la fonction définie par :

$$\varphi_n(x) = n^2x + n, \text{ si } -\frac{1}{n} \le x \le 0,$$
$$\varphi_n(x) = -n^2x + n, \text{ si } 0 < x \le \frac{1}{n} \text{ et}$$
$$\varphi_n(x) = 0 \text{ si } |x| > \frac{1}{n}$$

a. Calculer la valeur de l'intégrale de φ_n sur $\mathbb{R}$.

b. Montrer, en utilisant la valeur de $\varphi_n(0)$, que l'hypothèse (H_c) entraîne que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n(x)(n - \delta(-x))\,dx = 0$$

c. Montrer qu'il existe un entier non nul N tel que, pour tout entier n, $n \ge N$, on a :

$$n - \delta(-x) > 0 \text{ pour tout } x \text{ vérifiant } |x| < \frac{1}{n}$$

d. Déduire que l'hypothèse (H_c) ne peut être vraie.

II. On note par $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$ à support compact et, si K est un compact de $\mathbb{R}$, on note par $\mathcal{D}(K)$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ des fonctions dont le support est inclus dans K. (On admettra que $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et que $\mathcal{D}(K)$ en est un sous-espace vectoriel).

1. Soit K un compact de $\mathbb{R}$. Pour $\varphi \in \mathcal{D}(K)$ et $n \in \mathbb{N}$ on pose :

$$\psi_n(x) = \frac{1}{x^{n+1}}\left[\varphi(x) - \sum_{j=0}^{n} \frac{x^j}{j!}\varphi^{(j)}(0)\right] \quad \text{pour } x \text{ non nul et}$$

$$\psi_n(0) = \frac{1}{(n+1)!}\varphi^{(n+1)}(0)$$

(où pour, k entier, on a noté par $\varphi^{(k)}$ la dérivée k-ième de φ)

Montrer que, pour tout entier n, ψ_n est continue et qu'il existe une constante C telle que :

$$\sup_{x \in K} |\psi_n(x)| \leq C \sup_{x \in K} |\varphi^{(n+1)}(x)|$$

2. a. Pour tout entier non nul n, $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $u_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - \ln(n)$

Montrer que la suite $(u_n ; n \in \mathbb{N}^*)$ est convergente. On notera Γ sa limite.

b. Montrer que pour toute φ de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ la limite, quand n tend vers l'infini, de

$$\left(\left(\sum_{j=1}^{n} \varphi\left(\frac{1}{j}\right)\right) - n\,\varphi(0) - \varphi'(0)\ln(n)\right) \text{ existe.}$$

c. On pose, pour φ de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$: $\langle T, \varphi \rangle = \lim_{n \to \infty} \left(\left(\sum_{j=1}^{n} \varphi\left(\frac{1}{j}\right)\right) - n\,\varphi(0) - \varphi'(0)\ln(n)\right)$

Montrer qu'il existe des constantes C_0, C_1 et C_2 telles que :

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq \sum_{k=0}^{2} C_k \sup_{x \in \mathbb{R}} |\varphi^{(k)}(x)|$$

d. On considère une suite $(\varphi_n, n \in \mathbb{N}^*)$ de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ vérifiant :

$$\left\{\begin{array}{c} 0 \leq \varphi_n(x) \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \\ \varphi_n(x) = 0 \quad \text{si } x \leq \frac{1}{n+1} \text{ ou } x \geq 2 \\ \varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ si } \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{array}\right\}$$

i) Étudier la convergence simple et uniforme de la suite $(\varphi_n, n \in N^*)$ sur $\mathbb{R}$.

ii) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in N^*$

$\varphi_n^{(k)}(x) = 0$ pour x appartenant à l'ensemble $\left\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{m}, \ldots ; m \in \mathbb{N}^*\right\}$

iii) Montrer que $\langle T , \varphi_n \rangle$ tend vers l'infini quand n tend vers l'infini .

3 . Dans toute la suite les fonctions φ appartiennent à $\mathcal{D}$ (K) où K est un compact de $\mathbb{R}$.

a. On considère la fonction qui, à tout réel x non nul fait correspondre $\ln(|x|)\,\varphi(x)$.

Montrer que cette fonction est intégrable sur $(-\infty , 0[$ et sur $]0 , +\infty)$.

b. On pose : $\langle \ln|x| , \varphi \rangle = \displaystyle\int_{-\infty}^{0} \ln|x|\,\varphi(x)\,dx + \int_{0}^{+\infty} \ln|x|\,\varphi(x)\,dx$

Montrer qu'il existe une constante C_0 telle que, pour toute fonction φ de $\mathcal{D}$ (K)

$$|\langle \ln|x| , \varphi \rangle| \leq C_0 \sup_{x \in \mathbb{R}} |\varphi(x)|$$

c. Montrer que la limite, quand ε tend vers zéro, de $\displaystyle\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx$ existe.

Cette démonstration prouve-t-elle l'intégrabilité de la fonction : $x \to \dfrac{\varphi(x)}{x}$ sur $(-\infty , 0[$ et sur $]0 , +\infty)$?

On pose :

$$\left\langle vp\ \frac{1}{x} , \varphi \right\rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx \right)$$

i) Montrer qu'il existe deux constantes C_0 et C_1 telles que :

$$\left| \left\langle vp\ \frac{1}{x} , \varphi \right\rangle \right| \leq \sum_{k=0}^{1} C_k \sup_{x \in \mathbb{R}} |\varphi^{(k)}(x)|$$

pour toute φ de $\mathcal{D}$ (K).

ii) Montrer que, pour toute φ de $\mathcal{D}$ (K) on a : $\left\langle vp\ \frac{1}{x} , \varphi \right\rangle = -\langle \ln|x| , \varphi^{(1)} \rangle$

d. Montrer que, pour toute φ de $\mathcal{D}$ (K), la limite, quand ε tend vers zéro, de

$$\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x^2}\,dx - \frac{\varphi(0)}{\varepsilon} + \varphi^{(1)}(0) \ln(\varepsilon) \quad \text{existe}$$

On pose :

$$\left\langle Pf\ \frac{H}{x^2} , \varphi \right\rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x^2}\,dx - \frac{\varphi(0)}{\varepsilon} + \varphi^{(1)}(0) \ln(\varepsilon) \right)$$

Montrer qu'il existe trois constantes C_0 , C_1 et C_2 telles que, pour toute φ de $\mathcal{D}$ (K) :

$$\left| \left\langle Pf\ \frac{H}{x^2} , \varphi \right\rangle \right| \leq \sum_{k=0}^{2} C_k \sup_{x \in \mathbb{R}} |\varphi^{(k)}(x)|$$